Sistema a fase minima

PREMESSA

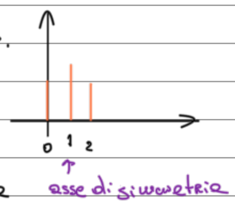
Un sistema a fase minima è quello che ha la risposta in fase più piccola di tutti gli altri, cioè introduce il minor ritardo possibile.
La caratteristica principale di questi sistemi è quella di avere tutti i poli e gli zeri interni al cerchio unitario dunque il sistema è stabile.
I sistemi possono essere del tipo FIR e IIR.

IDEA PER LO STUDIO

Data la funzione di trasferimento di un sistema LTI con poli esterni al cerchio unitario devo modificarla di modo che tutti i poli/zeri diventino interni.

FUNZIONE DI TRASF. PER SISTEMI A FASE MIN

Data la seguente risposta in frequenza $h[n] = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9} \right\}$. L'aver utilizzato una simmetria di tipo 1 garantisce che il guadagno di ampiezza sia costante ma questa non è una caratteristica richiesta dunque la risposta impulsiva può essere anche asimmetrica. Nel caso di specie usiamo la simmetria per praticità dei calcoli.



$$h[n] \longrightarrow H(z) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} z^{-1} + \frac{2}{9} z^{-2} = \frac{2+5z^{-1}+2z^{-2}}{9} = \frac{2z^2+5z+2}{9z^2}$$

ZERI DI $H(z)$ $\Rightarrow$ $z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$ $\boxed{z_1 = -2}$ $z_2 = -\frac{1}{2}$

devo fare in modo che diventi interno al cerchio unitario

POLO DI $H(z)$ $\Rightarrow$ $z_p = 0$ ma questo non porta contributi.

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2) = z^2+2z+\frac{1}{2}z+1 = z^2+\frac{5}{2}z+1 \Rightarrow 2\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2) = 2z^2+5z+2 \Rightarrow H(z) = \frac{2\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}{9z^2}$$

$$H(z) = \frac{2\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)z}{9z^2} = \frac{2\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}{9z} \Rightarrow A_1 = H(z)\,\frac{(z-0)}{z}\Big|_{z=0} = \left(\frac{2}{9}+\frac{5}{9}z^{-1}+\frac{2}{9}z^{-2}\right)\frac{(z-0)}{z}\Big|_{z=0} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right) = \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)\underbrace{\frac{2+z^{-1}}{2+z^{-1}}} = \underbrace{\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(2+z^{-1}\right)}_{H_{min}}\ \underbrace{\frac{1+2z^{-1}}{2+z^{-1}}}_{H_{ap}} = H_{min} \cdot H_{ap}$$

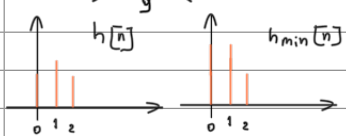
manipolazione per portare lo zero all'interno del cerchio unitario

Un sistema a fase minima non altera il guadagno del sistema da cui deriva

$$\Rightarrow H(z) \longrightarrow H(F) = H_{min}(F)\,H_{ap}(F) \longrightarrow |H(F)| = |H_{min}(F)|\,\overbrace{|H_{ap}(F)|}^{=1} = |H_{min}(F)|$$

EFFETTI DI $H_{min}(z)$

$$H_{min}(z) = \frac{2}{9}\left(2+z^{-1}+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right) = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2} \Rightarrow h_{min}[n] = \left\{\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right\}$$



In un sistema a fase minima l'energia è concentrata maggiormente nei campioni iniziali

FASE ED ENERGIA DI $H_{min}(z)$

$$H(z) = H_{min}(z)\,H_{ap}(z) \Rightarrow H(F) = H_{min}(F)\,H_{ap}(F) \Rightarrow \angle H(F) = \angle H_{min}(F) + \angle H_{ap}(F)$$

ESPRIMO IL RITARDO IN CAMPIONI $\frac{\angle H(F)}{-2\pi F} = \frac{\angle H_{min}(F)}{-2\pi F} + \frac{\angle H_{ap}(F)}{-2\pi F} \Rightarrow \tau_H = \tau_{min} + \tau_{ap} \Rightarrow \tau_{min} = \tau_H - \tau_{ap}$

$\Rightarrow$ Sapendo, per definizione, che $\tau_{ap} \geq 0$ $\tau_{min} \leq \tau_H$ questa condizione giustifica il nome.

$$\Rightarrow E_H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5} |H(F)|^2\,dF = \int_{-0.5}^{0.5} |H_{min}(F)|^2\,dF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{min}[n]|^2 = \frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{1}{81} = \frac{33}{81}$$

come si nota il maggior contributo all'energia lo danno i primi termini della sequenza.